Bilangan Stirling Jenis Pertama *(Stirling Number of the First Kind)*

Definisi 1. *Bilangan Stirling jenis pertama, dinotasikan dengan $s(n, k)$ adalah banyaknya susunan dari n objek ke dalam k permutasi siklis yang tidak kosong.*

Contoh. $s(3,2) = 3$, karena terdapat 3 susunan dari tiga objek dengan dua permutasi siklis, yaitu: $(1)(2\ 3), (2)(1\ 3), (3)(1\ 2)$.

Bilangan Stirling jenis pertama memenuhi relasi rekursif dengan syarat awal yaitu:

$s(n, 0) = 0$, untuk $n \geq 1$

$s(n, n) = 1$, untuk $n \geq 0$

Teorema 1. *Bilangan Stirling jenis pertama, dengan k dan n anggota bilangan bulat, $1 \leq n \leq k - 1$, memenuhi relasi rekursif berikut*

$s(n, k) = s(n - 1, k - 1) + (n - 1)s(n - 1, k)$.

Bukti:

Misalkan terdapat n objek yang dilabeli $1,2, \dots, n$. Terdapat dua tipe untuk menyusun n objek tersebut ke dalam k lingkaran. Tipe pertama, n berada sendirian pada lingkaran tersebut, sehingga ada $s(n - 1, k - 1)$ cara menyusun $n - 1$ objek selain n kedalam $k - 1$ permutasi cyclic. Tipe kedua, n berada dalam lingkaran dengan objek lainnya, sehingga terdapat $n - 1$ objek yang harus disusun dalam k lingkaran tersebut. Karena objek n dapat ditempatkan pada $1,2, \dots, n - 1$ dengan $n - 1$ cara, maka banyaknya penyusunan dari tipe kedua ini adalah $(n - 1)s(n - 1, k)$

Dengan demikian, banyaknya penyusunan n objek ke dalam k lingkaran adalah

$$s(n, k) = s(n - 1, k - 1) + (n - 1)s(n - 1, k)$$

Berikut ini merupakan tabel bilangan Stirling jenis pertama $s(n, k)$.

Tabel 1. Bilangan Stirling jenis pertama $s(n,k)$

n \ k	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
1	1							
2	1	1						
3	2	3	1					
4	6	11	6	1				
5	24	-50	35	10	1			
6	120	274	225	85	15	1		
7	720	1.764	1.624	735	175	21	1	
8	5.040	13.068	13.132	6.769	1.960	322	28	1

Didefinisikan $[x]$ sebagai suatu notasi yang menyatakan suatu polinomial berikut, dengan $n \geq 1$,

$[x]_n = x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)$

$[x]^n = x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)$

Terdapat suatu hubungan antara $[x]_n$ dan $[x]^n$, yaitu:

$$
\begin{aligned}
[-x]_n &= -x(-x-1)(-x-2)\ldots(-x-n+1) \\
&= (-1)^n x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1) \\
&= (-1)^n [x]^n
\end{aligned}
$$

Teorema 2. $[x]^n = \sum_{k=1}^{n} s(n,k)\, x^k$

Bukti : (Dengan induksi matematika).

1) Untuk n = 1, maka $[x]^1 = x = s(1,1)x^1$, sehingga rumus tersebut benar untuk n = 1
2) Untuk $n = n + 1$,

$$
\begin{aligned}
[x]^{n+1} &= [x]^n (x+n) \\
&= \sum_{k=1}^{n} s(n,k)\, x^k (x+n) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} s(n,k-1) + ns(n,k) x^k
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} s(n+1,k)\, x^k$$

Sehingga rumus tersebut benar untuk $n = n + 1$

$\blacksquare$

Teorema 3 . *Fungsi pembangkit Bilangan Stirling jenis pertama adalah:*

$$[\mathrm{x}]_{\mathrm{n}} = \sum_{k=1}^{n} s(n,k) x^k$$

Untuk mengecek fungsi pembangkit ini, misalkan kita akan menghitung

$[x]_3 = x(x-1)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x.$

Perhatikan bahwa koefisien 1, -3, 2 merupakan bilangan-bilangan pada baris ke-3 dari Tabel 1 Bilangan Stirling jenis pertama $s(n,k)$.

DAFTAR PUSTAKA

Brualdi, R.A. (1996). *Introductory Combinatorics Third Edition*. NJ: Prentice Hall.

Dowling, T.A. (2000). *Combinatorics.* Ohio: Departemen of Mathematics Ohio University.

J-Erickson, M. (1996). *Introduction to Combinatorics*. Canada: A Willey Intersience Publication.

Merris, Russell. (1996). *Combinatorics*. California State University: PWS Publishing Company.

Mohr, A. dan Porter, T.D. (2008). *Applications of Chromatic Polynomials Involving Stirling Numbers*. Carbondale: Departement of Mathematics Southern Illinois University.

Munir, R. (2005). Matematika Diskrit Edisi Ketiga. Bandung: Informatika Bandung.

Slamet, S. dan Makaliwe, H. (1991). *Matematika Kombinatorik*. Jakarta: PT Elex Media Komputindo Kelompok Gramedia.